KDA 训练 → 推理完整笔记

递归 · 分块 · Gate · MLA · MoE · AttnRes · K3 架构

2026 年 8 月 25 日

项目：`projects/kda/` —KDA 手写实现（naive recurrent → chunked → Triton）
架构：KDA + Gated MLA + Stable LatentMoE + AttnRes 深度残差 (K3-like)
参考：KDA arXiv:2510.26692; AttnRes arXiv:2603.15031; Kimi K3 architecture notes
代码：`kda/ops/`, `kda/layers/`, `kda/models/`

目录

1 KDA 递归核心 **4**

1.1 动机：从 softmax 到状态矩阵 4

1.2 逐步公式 4

1.3 代码对照 5

1.4 Delta rule 的直觉 5

1.5 本章小结 5

2 Gate 激活 **6**

2.1 Gate 的角色 6

2.2 两种 Gate 6

2.3 代码对照 6

2.4 初始化与默认值 7

2.5 Gate 在 API 中的位置 7

2.6 本章小结 7

3 分块并行计算（Chunkwise） **7**

3.1 为什么需要分块? 7

3.2 chunk 内的 cumsum 与下三角解 8

3.3 代码对照 8

3.4 chunk 间递推 8

3.5 形状流水线 9

3.6 Decayed dot 函数 10

3.7 本章小结 10

4 GVA（分组值注意力） **10**

4.1 为什么头数不一样? 10

4.2 Forward: repeat_interleave 10

4.3 Backward: view + sum 11

4.4 scale 的处理 11

4.5 KDAAttention 层中的投影 11

4.6 投影矩阵形状总览 12

4.7 本章小结 12

5 KDAAttention 层 **12**

5.1 完整数据流 12

5.2 chunk_kda 内部做了什么 12

5.3 可学习参数清单 13

5.4 本章小结 13

6 Gated MLA（矩阵吸收版） 13
6.1 标准 MHA 的 KV cache 问题 . . . 13
6.2 低秩压缩 . . . 13
6.3 矩阵吸收的核心思路 . . . 14
6.4 完整计算流（四步） . . . 14
6.5 代码对照 . . . 15
6.6 形状与参数对比 . . . 16
6.7 本章小结 . . . 16

7 SiTU-GLU 与 Stable LatentMoE 16
7.1 SiTU-GLU：带软上限的激活 . . . 16
7.2 LatentMoE 架构 . . . 17
7.3 计算流（五步） . . . 17
7.4 代码对照：路由 . . . 18
7.5 稀疏执行：permute-dispatch + padded bmm . . . 19
7.6 负载均衡损失：Switch/GShard aux + z-loss . . . 20
7.7 形状总览 . . . 21
7.8 本章小结 . . . 21

8 K3 混合架构 21
8.1 整体结构 . . . 21
8.2 Hybrid Attention Pattern . . . 21
8.3 CausalLM 完整数据流 . . . 23
8.4 两种配置 . . . 23
8.5 K3 toy 尺寸 . . . 24
8.6 DecoderBlock 构建 . . . 24
8.7 架构图 . . . 25
8.8 本章小结 . . . 26

9 Attention Residual 深度残差 26
9.1 从”等权累加”到”按内容选择” . . . 26
9.2 DepthResidual：三个实现细节 . . . 27
9.3 Full 与 Block：源数量的差别 . . . 28
9.4 两阶段算法（inter / intra） . . . 29
9.5 接入 CausalLM . . . 30
9.6 配置与命令行 . . . 32
9.7 验证清单 . . . 32
9.8 本章小结 . . . 33

10 反向传播推导 33
10.1 Forward 回顾 . . . 33
10.2 反传公式（BPTT，$T \to 0$） . . . 33

10.3 代码对照 35
10.4 本章小结 36

11 符号表 **36**
11.1 形状参数 36
11.2 KDA 变量 37
11.3 Gate 变量 37
11.4 MLA 变量 37
11.5 LatentMoE 变量 38
11.6 AttnRes 变量 38
11.7 Einsum 速查 39
11.8 总结与延伸 39

1 KDA 递归核心

1.1 动机：从 softmax 到状态矩阵

标准 attention 每个 token 都要回看所有历史，复杂度 $O(T^2)$。线性注意力换掉 softmax，把 $\sum_j v_j k_j^T$ 压成一个 $K \times V$ 的状态矩阵 S，每步只做 $o_t = q_t \cdot S$，复杂度降到 $O(T \cdot K \cdot V)$。

但裸线性注意力的问题是：S 只能加，不能改。写进去的信息永远在那里。KDA 的核心想法是给 S 加两个操作：**衰减**（逐渐忘记旧信息）和 **delta rule**（先擦旧的，再写新的）。

如果你只记一件事

KDA 的状态更新 = 衰减旧状态 + $\beta_t k_t$ 写入 $(v_t - k_t \cdot S_{\text{dec}})$。减去 $k_t \cdot S_{\text{dec}}$ 就是" 先把 k_t 方向的旧预测擦掉"。

1.2 逐步公式

输入张量：

符号	形状	含义
q_t	$[B, HV, K]$	query（已经 repeat_interleave 到 HV）
k_t	$[B, HV, K]$	key（同上）
v_t	$[B, HV, V]$	value
g_t	$[B, HV, K]$	gate（log-space 衰减率，逐维）
β_t	$[B, HV]$	写入强度标量
S_{t-1}	$[B, HV, K, V]$	上一步的 KV 状态

四步更新：

1. **衰减旧状态**（逐元素，g_t 是 log-space 所以取 exp）：

$$S_{\text{dec}} = \exp(g_t) \odot S_{t-1} \qquad [B, HV, K, V]$$

2. **计算残差**（先用 k_t 查旧状态，得到" 旧预测"，再减掉）：

$$p_t = \sum_k k_{t,k} \cdot S_{\text{dec},k,\cdot} = \texttt{einsum('bhk, bhkv -> bhv')} \qquad [B, HV, V]$$

$$r_t = v_t - p_t \qquad [B, HV, V]$$

3. **写入状态**（外积 rank-1 更新）：

$$a_t = \beta_t \cdot k_t \qquad [B, HV, K]$$

$$S_t = S_{\text{dec}} + a_t \otimes r_t = S_{\text{dec}} + \texttt{einsum('bhk, bhv -> bhkv')} \qquad [B, HV, K, V]$$

4. **读出**：

$$o_t = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot q_t \cdot S_t = \texttt{einsum('bhk, bhkv -> bhv')} \qquad [B, HV, V]$$

1.3 代码对照

ops/reference/recurrent.py —naive_kda_fwd（核心循环）

```
for t in range(T):
    q_t = qe[:, t]          # [B, HV, K]
    k_t = ke[:, t]          # [B, HV, K]
    v_t = v[:, t]           # [B, HV, V]
    g_t = g[:, t]           # [B, HV, K]
    b_t = beta[:, t]        # [B, HV]

    # Step 1: decay
    S_dec = S * g_t.exp().unsqueeze(-1) # [B,HV,K,V]

    # Step 2: residual (delta rule)
    p_t = einsum('bhk, bhkv -> bhv', k_t, S_dec)
    r_t = v_t - p_t                     # [B,HV,V]

    # Step 3: write (rank-1 update)
    a_t = b_t.unsqueeze(-1) * k_t       # [B,HV,K]
    S = S_dec + einsum('bhk, bhv -> bhkv', a_t, r_t)

    # Step 4: read
    o[:, t] = einsum('bhk, bhkv -> bhv', q_t, S)
```

为什么 exp(g_t) 要 unsqueeze(-1)？

g_t 的形状是 $[B, HV, K]$，而 S 是 $[B, HV, K, V]$。衰减是在 K 维上逐元素（同一 k 索引的所有 v 维度共享同一个衰减率），所以 `exp(g_t).unsqueeze(-1)` 把 K 维 broadcast 到 $K \times V$。

1.4 Delta rule 的直觉

为什么减去 $k_t \cdot S_{\text{dec}}$？

把 S 想象成一个 $K \to V$ 的线性映射。用 k_t 去查它，得到的 $p_t = k_t^T S$ 就是“旧状态对 k_t 方向的预测”。如果 p_t 已经很接近 v_t，说明这个方向的信息已经写好了，不需要再写。$r_t = v_t - p_t$ 就是“需要修正的量”。

这就是 Widrow-Hoff delta rule：不是盲目地加，而是只修正误差。

1.5 本章小结

KDA 的状态更新 = 衰减旧状态 + $\beta_t k_t$ 写入残差 $(v_t - k_t \cdot S_{\text{dec}})$。每步复杂度 $O(K \cdot V)$（两次矩阵-向量乘 + 一次外积），不需要 softmax。

2 Gate 激活

2.1 Gate 的角色

回顾 §1：$S_{\text{dec}} = \exp(g_t) \odot S_{t-1}$。$g_t$ 必须 ≤ 0 才是衰减（$\exp(g_t) \leq 1$），否则状态会指数增长爆炸。

`g_raw` 是从 `g_proj(x)` 出来的 raw 值，没有约束。Gate 激活函数的任务是：把 raw 值映射到一个保证 ≤ 0 的范围。

2.2 两种 Gate

	Standard gate	**Safe gate**
公式	$g = -\text{rate} \cdot \text{softplus}(\text{input})$	$g = L \cdot \sigma(\text{rate} \cdot \text{input})$
值域	$(-\infty, 0]$	$[L, 0]$（L 是 lower_bound，如 -5）
衰减范围	$\exp(g) \in (0, 1]$	$\exp(g) \in [\exp(L), 1]$
稳定性	衰减可以任意快	衰减有下限，不会瞬间清零

其中：

- $\text{input} = g_{\text{raw}} + \Delta_b$　（Δ_b 是 `dt_bias` $[HV, K]$）
- $\text{rate} = \exp(A_{\log})$　（$A_{\log}$ 是 `A_log` $[HV]$，head-wise 可学习）

如果你只记一件事

Safe gate $= L \cdot \sigma(\text{rate} \cdot \text{input})$，$L = -5$ 时 $\exp(g) \geq \exp(-5) \approx 0.0067$，状态永远不会被“一次性清零”。

2.3 代码对照

ops/reference/gate.py —kda_gate_reference

```python
def kda_gate_reference(g, A_log, dt_bias=None, *,
                       safe_gate=False, lower_bound=None):
    HV, K = g.shape[-2:]
    gate_input = g if dt_bias is None else g + dt_bias.view(HV, K)
    rate = A_log.view(HV, 1).exp()

    if safe_gate:
        # safe: g in [lower_bound, 0]
        return lower_bound * torch.sigmoid(rate * gate_input)
    # standard: g in (-inf, 0]
    return -rate * F.softplus(gate_input)
```

2.4 初始化与默认值

参数	初始值	效果
`A_log`	**0** $[HV]$	rate $= \exp(0) = 1$，不缩放
`dt_bias`	-4.0 $[HV, K]$	初始时 input $\approx g_{\text{raw}} - 4$，配合 safe gate $(L = -5)$ 得到 $g \approx -5 \cdot \sigma(-4) \approx -0.09$，即 $\exp(g) \approx 0.91$（约 91% 状态保留）
`lower_bound`	-5.0	safe gate 的下限

2.5 Gate 在 API 中的位置

Gate 激活在 `ops/api.py` 的 `chunk_kda` 中调用，在进入 chunkwise 或 recurrent 核心之前完成。当 `use_gate_in_kernel=True` 时，`g_raw` 进入 API，API 内部完成 gate 激活；否则调用方自己完成。

```
# ops/api.py (simplified)
if use_gate_in_kernel:
    gate_input = g + dt_bias.view(g.shape[-2:])
    rate = A_log.exp().view(1, 1, -1, 1)
    if safe_gate:
        g = lower_bound * torch.sigmoid(rate * gate_input)
    else:
        g = -rate * F.softplus(gate_input)
```

2.6 本章小结

Gate 把 raw projection 映射到 ≤ 0 的 log-space 衰减率。Safe gate 用 sigmoid 限制在 $[L, 0]$，防止瞬间清零；standard gate 用 softplus 不限制下限。默认配置下初始状态保留约 91%。

3 分块并行计算（Chunkwise）

3.1 为什么需要分块？

Naive recurrent 一步一步算，T 步串行，GPU 利用率低。分块的想法是把序列切成 T/C 个长度为 C 的 chunk：

- **chunk 内**：C 个 token 之间的依赖可以用矩阵运算并行处理
- **chunk 间**：状态 S 从上一个 chunk 传到下一个，仍然是递推

如果你只记一件事

Chunkwise = chunk 内并行 + chunk 间递推。数值结果与 naive recurrent 逐位一致。

3.2 chunk 内的 cumsum 与下三角解

在每个 chunk 内，先对 g 做 cumsum（前缀和），这样衰减就变成了相对距离的函数：

$$g_{\text{cum},i} = \sum_{j=0}^{i} g_j, \qquad \text{token } i \text{ 对 token } j \text{ 的衰减} = \exp(g_{\text{cum},i} - g_{\text{cum},j})$$

定义 **decayed dot** 矩阵（chunk 内 $C \times C$）：

$$A_{ij} = \langle x_i, \exp(g_{\text{cum},i} - g_{\text{cum},j}) \cdot k_j \rangle \qquad [..., C, C]$$

这个矩阵的构造是 chunk 内计算的核心。用它可以构造一个下三角线性系统：

$$M = I + \text{tril}(A_{kk} \cdot \beta, \text{diagonal} = -1) \qquad [..., C, C]$$

$$M \cdot W = \exp(g_{\text{cum}}) \cdot k \qquad \Rightarrow \qquad W = M^{-1}(\exp(g_{\text{cum}}) \cdot k)$$

$$M \cdot U = v \qquad \Rightarrow \qquad U = M^{-1} v$$

3.3 代码对照

ops/reference/chunkwise.py —naive_chunk_kda（核心）

```
# Rearrange: [B,T,H,K] -> [B,H,N,C,K] where N=T/C
q, k = [rearrange(x, 'b (n c) h d -> b h n c d', c=C)
       .repeat_interleave(HV//H, dim=1) for x in (q, k)]
v, g = [rearrange(x, 'b (n c) h d -> b h n c d', c=C)
       for x in (v, g)]
beta = rearrange(beta, 'b (n c) h -> b h n c', c=C)
q = q * scale
g = g.cumsum(dim=-2)   # chunk 内 cumsum

# Construct triangular system
A_kk = _decayed_dot(k, k, g)  # [B,HV,N,C,C]
M = eye + (A_kk * beta[...,None,:]).masked_fill(mask_upper, 0)
W = solve_triangular(M, g.exp() * k, upper=False)
U = solve_triangular(M, v, upper=False)

# A_qk: query 对 key 的 decayed dot（含对角线）
A_qk = (_decayed_dot(q, k, g) * beta[...,None,:])
      .masked_fill(mask_strict_upper, 0)
```

3.4 chunk 间递推

每个 chunk 内算完后，用 W 和 U 来处理跨 chunk 的状态：

ops/reference/chunkwise.py —chunk 间循环

```
S = zeros(B, HV, K, V)    # inter-chunk state
for n in range(T // C):
    # r = "local residual, adjusted by cross-chunk state"
    r = U[:,:,n] - W[:,:,n] @ S        # [B,HV,C,V]

    # output: cross-chunk part + intra-chunk part
    o[:,:,n] = (q_n * g_n.exp()) @ S + A_qk[:,:,n] @ r

    # update cross-chunk state
    decay = (g_n[:,:,-1:,:] - g_n).exp() # decay to chunk end
    S = S * g_n[:,:,-1,:,None].exp()    # decay old state
    S = S + (decay * k_n).T @ (r * beta_n) # write new
```

3.5 形状流水线

变量	形状	说明
q, k (chunked)	$[B, HV, N, C, K]$	$N = T/C$ 个 chunk
v, g (chunked)	$[B, HV, N, C, V/K]$	
beta (chunked)	$[B, HV, N, C]$	
A_kk	$[B, HV, N, C, C]$	key-key decayed dot
M	$[B, HV, N, C, C]$	下三角系统
W	$[B, HV, N, C, K]$	$M^{-1}(\exp(g) \cdot k)$
U	$[B, HV, N, C, V]$	$M^{-1}v$
A_qk	$[B, HV, N, C, C]$	query-key decayed dot
S	$[B, HV, K, V]$	跨 chunk 状态
r	$[B, HV, C, V]$	调整后的残差
o (chunk n)	$[B, HV, C, V]$	本 chunk 输出

为什么用 triangular solve 而不是直接矩阵乘？

Delta rule 的”先擦再写”引入了 chunk 内 token 之间的递归依赖：token i 的写入依赖 token $j < i$ 的写入结果。这个依赖关系恰好形成一个下三角线性系统 $M \cdot x = b$，用 `solve_triangular` 可以在 $O(C^2)$ 内并行求解，而展开递归需要 $O(C)$ 步串行。

3.6 Decayed dot 函数

ops/reference/chunkwise.py —_decayed_dot

```
def _decayed_dot(x, k, g):
    """A[..., i, j] = <x_i, exp(g_i - g_j) * k_j>"""
    C = x.shape[-2]
    A = empty(*x.shape[:-2], C, C)
    for i in range(C):
        decay = (g[..., i:i+1, :] - g).exp() # [.., 1, K] - [.., C, K]
        A[..., i, :] = einsum('...jk,...jk->...j',
                              x[..., i, None, :] * decay, k)
    return A
```

这是一个 $C \times C$ 的矩阵，每个元素 (i, j) 是 x_i 和 $\exp(g_i - g_j) \cdot k_j$ 的内积。Triton 实现会把这个双循环融合成一个 kernel。

3.7 本章小结

分块把 T 步串行拆成 T/C 个 chunk，chunk 内用下三角 solve 并行处理 delta rule 依赖，chunk 间递推状态 S。最终输出与 naive recurrent 逐位相同。

4 GVA（分组值注意力）

4.1 为什么头数不一样？

标准 MHA 里 $H_q = H_k = H_v$。GQA（Grouped Query Attention）让多组 q/k 共享同一组 v/k，减少 KV cache。KDA 反过来做：H 组 q/k 对应 $H_V = G \cdot H$ 组 value heads。

直觉：value 维度决定表达能力，多一点 value head 增加容量；q/k 主要负责路由（“看哪里”），可以共享。

	标准头数	GVA
q, k	$[B, T, H, K]$	$[B, T, H, K]$（不变）
v	$[B, T, H, V]$	$[B, T, HV, V]$（$H_V = G \cdot H$）
g, β	$[B, T, H, K/1]$	$[B, T, HV, K/1]$
S	$[B, H, K, V]$	$[B, HV, K, V]$

4.2 Forward: repeat_interleave

进入 KDA 核心前，q 和 k 从 H 维复制到 H_V 维：

```
G = HV // H
qe = q.repeat_interleave(G, dim=2) * scale # [B,T,H,K] -> [B,T,HV,K]
ke = k.repeat_interleave(G, dim=2)     # [B,T,H,K] -> [B,T,HV,K]
```

例如 $H = 4, G = 2, H_V = 8$：head 0 的 q/k 复制到 value head 0 和 1，head 1 复制到 value head 2 和 3，依此类推。

4.3 Backward: view + sum

反传时，dq_e 和 dk_e 的形状是 $[B, T, HV, K]$（在 H_V 维上计算的梯度）。因为 forward 是复制，反传就是求和：

```
# Backward: HV -> H
dq_H = dq_e.view(B, T, H, G, K).sum(dim=3) # [B,T,HV,K] -> [B,T,H,K]
dk_H = dk_e.view(B, T, H, G, K).sum(dim=3)
```

为什么是 sum 不是 mean？

`repeat_interleave` 是**复制**：$y_0 = x_0, y_1 = x_0, y_2 = x_1, \ldots$

对 x_0 的梯度 $= \frac{\partial L}{\partial y_0} + \frac{\partial L}{\partial y_1} =$ **sum**（不是 mean）。

这和 `.expand()` 的反传一样：复制的反传是求和。

4.4 scale 的处理

q 在 repeat_interleave 之后乘了 `scale` $= 1/\sqrt{K}$。反传时 chain rule 要求 $dq_{\text{orig}} = dq_e \cdot$ `scale`：

```
# q 在 forward 内被乘过 scale, chain rule:
dq_H = dq_H * scale
```

4.5 KDAAttention 层中的投影

layers/kda_attn.py —forward

```
def forward(self, x): # x: [B, T, D]
    B, T, _ = x.shape
    H, HV, K, V = self.num_heads, self.num_value_heads, ...

    q = self.q_proj(x).view(B, T, H, K) # [B,T,D] -> [B,T,H*K] -> [B,T,H,K]
    k = self.k_proj(x).view(B, T, H, K) # 同上
    v = self.v_proj(x).view(B, T, HV, V) # [B,T,D] -> [B,T,HV*V] -> [B,T,HV,V]
    g_raw = self.g_proj(x).view(B, T, HV, K)
    beta_raw = self.beta_proj(x).view(B, T, HV)

    o, _ = chunk_kda(q, k, v, g_raw, beta_raw, ...)
    return self.o_proj(o.reshape(B, T, HV * V)) # [B,T,HV,V] -> [B,T,D]
```

4.6 投影矩阵形状总览

投影	权重形状	输入	输出
`q_proj`	$[H \cdot K, D]$	$[B, T, D]$	$[B, T, H, K]$
`k_proj`	$[H \cdot K, D]$	$[B, T, D]$	$[B, T, H, K]$
`v_proj`	$[HV \cdot V, D]$	$[B, T, D]$	$[B, T, HV, V]$
`g_proj`	$[HV \cdot K, D]$	$[B, T, D]$	$[B, T, HV, K]$
`beta_proj`	$[HV, D]$	$[B, T, D]$	$[B, T, HV]$
`o_proj`	$[D, HV \cdot V]$	$[B, T, HV \cdot V]$	$[B, T, D]$

4.7 本章小结

GVA 让 $H_V = G \cdot H$ 组 value heads 共享 H 组 q/k。Forward 用 `repeat_interleave` 复制，backward 用 `view+sum` 归约。v, g, β 直接在 H_V 维投影，q/k 在 H 维投影。

5 KDAAttention 层

5.1 完整数据流

`KDAAttention` 把投影、gate 激活、KDA 核心计算和输出投影封装成一个 `[B,T,D]` → `[B,T,D]` 的模块。

步骤	操作	输入形状	输出形状
1	`q_proj(x)`	$[B, T, D]$	$[B, T, H, K]$
2	`k_proj(x)`	$[B, T, D]$	$[B, T, H, K]$
3	`v_proj(x)`	$[B, T, D]$	$[B, T, HV, V]$
4	`g_proj(x)`	$[B, T, D]$	$[B, T, HV, K]$
5	`beta_proj(x)`	$[B, T, D]$	$[B, T, HV]$
6	`chunk_kda(...)`	上述 5 项 + 参数	$[B, T, HV, V]$
7	`o.reshape(...)`	$[B, T, HV, V]$	$[B, T, HV \cdot V]$
8	`o_proj(...)`	$[B, T, HV \cdot V]$	$[B, T, D]$

5.2 chunk_kda 内部做了什么

`chunk_kda`（`ops/api.py`）是统一入口，按 `backend` 分发：

1. 如果 `use_qk_l2norm_in_kernel`：$q, k \leftarrow \text{L2-normalize}(q), \text{L2-normalize}(k)$
2. 如果 `use_beta_sigmoid_in_kernel`：$\beta \leftarrow \sigma(\beta_{\text{raw}})$
3. 如果 `use_gate_in_kernel`：应用 gate 激活（§2）
4. 调用 `naive_chunk_kda`（或 triton/fla 版本）

三个 “in_kernel” 开关

- `use_qk_l2norm`：L2-norm 让 $\langle q, k\rangle$ 变成余弦相似度，稳定训练
- `use_beta_sigmoid`：sigmoid 把 β 限制在 $(0, 1)$，控制写入强度
- `use_gate_in_kernel`：gate 激活在 API 内部完成（vs 调用方自己做）

默认三个都是 `True`。

5.3 可学习参数清单

参数	形状	说明
`q_proj.weight`	$[H \cdot K, D]$	query 投影
`k_proj.weight`	$[H \cdot K, D]$	key 投影
`v_proj.weight`	$[HV \cdot V, D]$	value 投影
`g_proj.weight`	$[HV \cdot K, D]$	gate 投影
`beta_proj.weight`	$[HV, D]$	beta 投影
`o_proj.weight`	$[D, HV \cdot V]$	输出投影
`A_log`	$[HV]$	head-wise 衰减率（log-space）
`dt_bias`	$[HV, K]$	per-dim gate bias

5.4 本章小结

KDAAttention 是一个完整的 mixing 模块：5 个线性投影 + gate 激活 + KDA 核心 + 输出投影。三个 “in_kernel” 开关控制 L2-norm、sigmoid、gate 是否在 API 内部完成。

6 Gated MLA（矩阵吸收版）

6.1 标准 MHA 的 KV cache 问题

标准 MHA 推理时需要缓存所有历史 token 的 K, V，cache 大小 $\propto T \cdot H \cdot d$。MLA 的想法：把 K, V 压缩成一个低秩 latent c，cache 大小 $\propto T \cdot r$，其中 $r \ll H \cdot d$。

6.2 低秩压缩

$$c = \mathrm{RMSNorm}(W_{\downarrow} \cdot x) \qquad [B, T, r]$$

推理时只缓存 c，不缓存解压后的 K, V。解压矩阵 $W_{\mathrm{KV}\uparrow}$ 包含两部分：

$$W_{\mathrm{KV}\uparrow} = \begin{bmatrix} W_{UK} \\ W_{UV} \end{bmatrix} \qquad [H \cdot (d_q + d_v), r]$$

拆开：$W_{UK} \in \mathbb{R}^{H \times d_q \times r}$（key 解压），$W_{UV} \in \mathbb{R}^{H \times d_v \times r}$（value 解压）。

6.3 矩阵吸收的核心思路

不解压 K 和 V。标准做法会先解压再算 attention：

$$\text{标准：}\ k_h = c \cdot W_{UK,h}^T\ [B,T,d_q],\ \text{score} = q_h \cdot k_h^T$$

矩阵吸收反过来：把 W_{UK} 吸收进 q：

$$\text{吸收：}\ q_{\text{abs},h} = q_h \cdot W_{UK,h}\ [B,T,r],\ \text{score} = q_{\text{abs},h} \cdot c^T$$

如果你只记一件事

$(q \cdot W_{UK}^T) \cdot c^T = q \cdot (W_{UK}^T \cdot c^T) = q_{\text{abs}} \cdot c^T$
吸收后，attention 直接在 latent 空间 r 维上算，永不解压到 $H \cdot d_q$ 维。

6.4 完整计算流（四步）

1. **Q 低秩路径**（NoPE，只有 nope 段）：

$$q = W_{q\uparrow} \cdot \text{RMSNorm}(W_{q\downarrow} \cdot x) \qquad [B,T,H,d_q]$$

2. **吸收 W_{UK} + 打分**：

$$q_{\text{abs}} = q \cdot W_{UK} \xrightarrow{\texttt{einsum('bthd,hdj->bthj')}} [B,T,H,r]$$

$$\text{score} = q_{\text{abs}} \cdot c^T \xrightarrow{\texttt{einsum('bthj,bsj->bhts')}} [B,H,T,T]$$

$$\text{attn} = \text{softmax}(\text{causal_mask}(\text{score})) \qquad [B,H,T,T]$$

3. **先在 latent 加权，再乘 W_{UV}^T**：

$$\tilde{o}_{\text{lat}} = \text{attn} \cdot c \xrightarrow{\texttt{einsum('bhts,bsj->bhtj')}} [B,H,T,r]$$

$$\tilde{o} = \tilde{o}_{\text{lat}} \cdot W_{UV}^T \xrightarrow{\texttt{einsum('bhtj,hvj->bhtv')}} [B,H,T,d_v]$$

4. **输出门 + 投影**：

$$y = W_o\left[\sigma(W_g \cdot x) \odot \tilde{o}_{\text{flat}}\right] \qquad [B,T,D]$$

6.5 代码对照

layers/mla.py —GatedMLA.forward

```
def forward(self, x): # x: [B, T, D]
    B, T, _ = x.shape
    H, r = self.num_heads, self.kv_up.in_features

    # Step 1: latent + query
    c = self.kv_norm(self.kv_down(x))       # [B, T, r]
    q = self.q_up(self.q_norm(self.q_down(x))) # [B, T, H*d_q]
    q = q.view(B, T, H, self.qk_nope_head_dim) # [B, T, H, d_q]

    # Split W_UK, W_UV from kv_up.weight
    w = self.kv_up.weight                    # [H*(d_q+d_v), r]
    w_uk = w[:H*d_q].view(H, d_q, r)        # [H, d_q, r]
    w_uv = w[H*d_q:].view(H, d_v, r)        # [H, d_v, r]

    # Step 2: absorb W_UK, score
    q_absorb = einsum('bthd,hdj->bthj', q, w_uk) # [B,T,H,r]
    scores = einsum('bthj,bsj->bhts', q_absorb, c) # [B,H,T,T]
    scores = scores.masked_fill(causal_mask, -inf)
    attn = softmax(scores, dim=-1)           # [B,H,T,T]

    # Step 3: latent-space weighted sum, then W_UV
    latent_out = einsum('bhts,bsj->bhtj', attn, c) # [B,H,T,r]
    o_heads = einsum('bhtj,hvj->bhtv', latent_out, w_uv) # [B,H,T,d_v]

    # Step 4: output gate
    o_heads = o_heads.transpose(1,2).reshape(B,T, H*d_v)
    gate = sigmoid(self.gate(x))             # [B,T,H*d_v]
    return self.o_proj(gate * o_heads)       # [B,T,D]
```

为什么可以先加权再乘 W_{UV}？

标准做法：$o = \text{attn} \cdot V = \text{attn} \cdot (c \cdot W_{UV}^T)$

交换顺序：$o = (\text{attn} \cdot c) \cdot W_{UV}^T$

这能成立是因为矩阵乘法的结合律：$A(BC) = (AB)C$。$\text{attn} \cdot c$ 先在 latent 空间 r 维上加权求和，得到的 $[B, H, T, r]$ 再乘 W_{UV}^T 还原到 d_v 维。全程不需要显式构造 $H \cdot T$ 大小的 V 矩阵。

6.6 形状与参数对比

参数	形状	说明
`kv_down.weight`	$[r, D]$	KV latent 压缩
`kv_up.weight`	$[H \cdot (d_q + d_v), r]$	包含 W_{UK} 和 W_{UV}
`q_down.weight`	$[r_q, D]$	Q 低秩
`q_up.weight`	$[H \cdot d_q, r_q]$	Q 解压
`gate.weight`	$[H \cdot d_v, D]$	输出门
`o_proj.weight`	$[D, H \cdot d_v]$	输出投影

KV cache 大小对比（推理时）：

方法	Cache 大小 per token
标准 MHA	$2 \times H \times d = 2Hd$
MLA (latent)	r（只存 c）

6.7 本章小结

Gated MLA 把 KV 压缩到低秩 latent c $[B, T, r]$，通过矩阵吸收（$q_{\text{abs}} = q \cdot W_{UK}$）直接在 latent 空间打分和加权，永不解压 K/V。输出通过 sigmoid 门控。NoPE：不使用 RoPE，位置感交给夹层 KDA 的 decay/gate。

7 SiTU-GLU 与 Stable LatentMoE

7.1 SiTU-GLU：带软上限的激活

SwiGLU 在低精度（fp16/bf16）训练时可能溢出：$\text{silu}(x) \cdot x$ 没有上限。SiTU-GLU 用 tanh 给门控和上投影加软上限：

$$\text{SiTU}(x) = W_o\Big[\underbrace{\beta_1 \tanh\left(\frac{W_g x}{\beta_1}\right) \cdot \sigma(W_g x)}_{\text{gate}} \cdot \underbrace{\beta_2 \tanh\left(\frac{W_u x}{\beta_2}\right)}_{\text{up}}\Big]$$

性质	说明
输出上限	$\|\text{SiTU}\|_\infty \le \beta_1 \cdot \beta_2 = 4 \times 25 = 100$
原点附近	$\tanh(x/\beta) \approx x/\beta$，所以 $\beta \cdot \tanh(x/\beta) \approx x$，退化为 SwiGLU
远端	软饱和，防 fp16 溢出

layers/latent_moe.py —SiTU

```python
class SiTU(nn.Module):
    def __init__(self, dim_in, dim_ff, beta1=4.0, beta2=25.0):
        self.w_g = nn.Linear(dim_in, dim_ff, bias=False)
        self.w_u = nn.Linear(dim_in, dim_ff, bias=False)
        self.w_o = nn.Linear(dim_ff, dim_in, bias=False)

    def forward(self, x):                # [*, dim_in]
        wg = self.w_g(x)
        g = self.beta1 * tanh(wg / self.beta1) * sigmoid(wg) # gate
        u = self.beta2 * tanh(self.w_u(x) / self.beta2) # up
        return self.w_o(g * u)           # [*, dim_in]
```

7.2 LatentMoE 架构

组件	说明
Shared 专家	n_{shared} 个 SiTU，全宽 $d \to d$，所有 token 都经过
Routed 专家	n_{routed} 个 SiTU，半宽 $\ell \to \ell$（$\ell = d/2$）
Latent 接口	$W_\downarrow : d \to \ell$, $W_\uparrow : \ell \to d$（压缩/还原）
Router	$W_r : d \to n_{\text{routed}}$，K3：$s = \sigma(W_r x)$，Top-$k(s+b)$，$p_i = s_i / \sum_{j \in T} s_j$

7.3 计算流（五步）

1. **Latent 压缩**：

$$z = W_\downarrow \cdot x \qquad [B, T, \ell]$$

2. **Routing**（K3 eq.13）：

$$s = \sigma(W_r \cdot x), \quad T = \text{TopK}(s + b, k), \quad p_i = \frac{s_i}{\sum_{j \in T} s_j}$$

3. **Routed 专家**（在 latent 空间 ℓ 上，稀疏执行，见 7.5 节）：

$$u = \sum_{i \in \text{Top-k}} p_i \cdot E_i^{\text{rt}}(z) \qquad [B, T, \ell]$$

数学上是" 对选中的 k 个专家加权求和"，但**实现上不是**用 `stack([e(z) for e in experts])` 把所有专家都算一遍——而是每个 token 只被送进它选中的 k 个专家（permute-dispatch + padded bmm）。

4. **Shared 专家**（全宽 d）：

$$s_{\text{sh}} = \sum_j E_j^{\text{sh}}(x) \qquad [B, T, d]$$

5. **合并**：

$$y = s_{\text{sh}} + W_\uparrow \cdot \text{RMSNorm}(u) \qquad [B, T, d]$$

如果你只记一件事

Routed 专家只在 $\ell = d/2$ 的 latent 空间操作，参数量是全宽专家的 1/4（ℓ^2 vs d^2）。Shared 专家保持全宽 d，提供基础表达能力。

7.4 代码对照：路由

layers/latent_moe.py —_route（K3 eq.13）

```
def _route(self, logits):                # logits: [B, T, n_routed]
    scores = sigmoid(logits)             # s = sigma(W_r x)
    ids = topk(scores + self.expert_bias, k).indices # T = TopK(s+b)
    selected = scores.gather(-1, ids)
    probs = selected / selected.sum(-1).clamp_min(1e-9) # p_i = s_i / sum_{j in T} s_j
    return ids, probs
```

注意三点：

1. **sigmoid 代替 softmax**：K3 的 router 对每个专家独立打分 $s_i = \sigma(w_i \cdot x)$，不再是 softmax 归一化。这样”专家之间”不互相竞争归一化预算，便于用 bias 做负载调节。
2. **bias 只进选择、不进权重**：`expert_bias` 是 `register_buffer(..., persistent=False)` 的非持久 buffer（初始化为 0，不进 `state_dict`），只参与 TopK$(s+b)$ 的选择，归一化 p_i 仍用原始 s_i。
3. **L1 归一化**：$p_i = s_i / \sum_{j \in T} s_j$（在选中的 k 个上做），权重之和为 1，等价于”选中的 sigmoid 分数重新归一化”。

7.5 稀疏执行：permute-dispatch + padded bmm

layers/latent_moe.py —_routed_u

```
def _routed_u(self, z, ids, probs):      # z: [B,T,ell] ids/probs: [B,T,k]
    N = B * T; R, k = self.n_routed, self.top_k
    tok = arange(N).unsqueeze(1).expand(N, k).reshape(-1) # 每个 token 重复 k 次
    eid, pw = ids.reshape(-1), probs.reshape(-1)

    order = eid.argsort(stable=True)     # 按专家 id 排序 -> 同专家连续
    tok, eid, pw = tok[order], eid[order], pw[order]

    counts = bincount(eid, minlength=R)  # 每个专家的 token 数
    offsets = counts.cumsum(0) - counts
    local_pos = arange(N*k) - offsets[eid] # 专家内局部位置
    C = int(counts.max().item())         # capacity = 最大负载

    gathered = z.reshape(N, ell)[tok]
    padded = index_put(zeros(R, C, ell), (eid, local_pos), gathered) # [R, C, ell]

    w_g = stack([e.w_g.weight for e in self.experts]) # [R, ff, ell]
    w_u = stack([e.w_u.weight for e in self.experts])
    w_o = stack([e.w_o.weight for e in self.experts]) # [R, ell, ff]

    wg = bmm(padded, w_g.transpose(-1,-2)) # [R, C, ff] grouped GEMM
    g  = beta1 * tanh(wg / beta1) * sigmoid(wg)
    wu = bmm(padded, w_u.transpose(-1,-2))
    h  = beta2 * tanh(wu / beta2)
    out = bmm(g * h, w_o.transpose(-1,-2)) # [R, C, ell]

    weighted = pw.unsqueeze(-1) * out[eid, local_pos]
    return index_add(zeros(N, ell), 0, tok, weighted).view(B, T, ell) # scatter-add
```

三步走：**(1) permute-dispatch**（按专家排序 + pad 到 $[R, C, \ell]$）→ **(2) padded bmm**（专家参数堆成 batch 维，三次 batched GEMM 一次算完 R 个专家）→ **(3) scatter-add**（`index_add` 把加权输出按 `tok` 累加回 u）。

为什么不用 dense stack？

朴素写法 `stack([e(z) for e in experts])` 会让每个专家都算全部 $B{\cdot}T$ 个 token，FLOPs 是 $R{\cdot}N$，退化成 dense，失去 MoE 的加速。稀疏 dispatch 把每个 token 只送进它选中的 k 个专家，FLOPs 是 $R{\cdot}C$（$C = \max_e \text{count}_e \approx k{\cdot}N/R$），当 $k \ll R$ 时远小于 $R{\cdot}N$。padding 槽位不被 `index_add` 收集，贡献零梯度；空专家仍留在堆叠权重里（padded grouped GEMM）。

为什么 router 用 x（全宽）而不是 z（latent）？

路由需要看到 token 的完整表示才能做好选择。如果用 z 路由，压缩过程可能丢失路由需要的信息。K3 论文里也是用全宽 x 做 Top-k，然后在 ℓ 空间计算。

7.6 负载均衡损失：Switch/GShard aux + z-loss

Top-k 路由容易”塌缩”到少数专家（router 学出永远选某几个专家），导致负载不均衡、专家利用率低。训练时加两个损失，由 train loop 加到 CE 上：

$$f_e = \frac{\#\{\text{路由到} e\}}{N \cdot k}, \qquad P_e = \frac{1}{N}\sum_t \sigma(W_r x_t)_e$$

$$\mathcal{L}_{\text{aux}} = n_{\text{routed}} \sum_e f_e \cdot P_e, \qquad \mathcal{L}_z = \frac{1}{N}\sum_t \left(\log \sum_j e^{l_{tj}}\right)^2$$

项	作用
$\mathcal{L}_{\text{aux}}$	Switch/GShard 风格：f_e 是专家 e 被路由到的 token 占比，P_e 是它的平均 sigmoid 分数。塌缩时 f 集中到单个专家、损失变大，逼着路由均匀化
$\mathcal{L}_z$	z-loss：对 raw logits 的 logsumexp 求平方，压住 logits 幅度、防 router 分数爆炸

layers/latent_moe.py —_balancing_losses

```python
def _balancing_losses(self, logits, ids):
    flat = logits.reshape(-1, self.n_routed).float()
    scores = sigmoid(flat)
    counts = bincount(ids.reshape(-1), minlength=self.n_routed).float()
    frac = counts / counts.sum().clamp_min(1.0) # f_e
    prob_mean = scores.mean(dim=0)              # P_e
    aux = self.n_routed * (frac * prob_mean).sum() # N * sum_e f_e * P_e
    z_loss = logsumexp(flat, dim=-1).square().mean() # mean (logsumexp)^2
    return self.aux_loss_coef * aux, self.z_loss_coef * z_loss
```

两个损失只在 `self.training` 且系数非零时计算；系数默认 $\alpha_{\text{aux}} = 10^{-2}$、$\alpha_z = 10^{-3}$（即 `K3Config` 的 `moe_aux_loss_coef` / `moe_z_loss_coef`，可用 `--moe-aux-coef` / `--moe-z-coef` 覆盖）。train loop 里 `moe_router_losses(model)` 把所有 LatentMoE 层的损失求和，`loss = task + aux + z_loss` 一起反传。两个损失只依赖 router 输出 `logits` 与不可微的索引 `ids`，所以梯度只流回 router 的 W_r，不碰专家权重。

7.7 形状总览

变量	形状	说明
x	$[B, T, d]$	输入
z	$[B, T, \ell]$	latent（$\ell = d/2$）
logits	$[B, T, n_r]$	router logits
s	$[B, T, n_r]$	σ(logits)
b	$[n_r]$	expert bias（非持久，只进 TopK 不进 p）
ids	$[B, T, k]$	Top-k 专家索引
probs	$[B, T, k]$	K3 sigmoid-L1 权重
padded	$[n_r, C, \ell]$	dispatch 后 pad 到容量 C 的张量
C	标量	最大专家负载（pad 宽度）
u	$[B, T, \ell]$	加权求和后的 routed 输出
`shared_out`	$[B, T, d]$	shared 专家求和
f_e, P_e	标量	aux loss 的负载占比 / 平均分数
$\mathcal{L}_{\text{aux}}$, $\mathcal{L}_z$	标量	负载均衡 / z-loss
y	$[B, T, d]$	最终输出

7.8 本章小结

LatentMoE 把 routed 专家限制在 $\ell = d/2$ 的 latent 空间，省参数。SiTU-GLU 给 gate 和 up 加 tanh 软上限（$\beta_1 = 4, \beta_2 = 25$），防止低精度溢出。路由走 K3 eq.13（sigmoid-TopK + L1 归一化），执行用稀疏 permute-dispatch + padded bmm （每个 token 只算 k 个专家，FLOPs $R \cdot C$ 而非 $R \cdot N$），训练加 Switch/GShard aux loss + router z-loss 防路由塌缩。

8 K3 混合架构

8.1 整体结构

$$\texttt{Embedding} \to \texttt{DecoderBlock} \times L \to \texttt{RMSNorm} \to \texttt{LM Head}$$

每个 `DecoderBlock` 是 Pre-Norm 残差：

```
def forward(self, x):
    x = x + self.attn(self.attn_norm(x)) # mixing
    return x + self.ffn(self.ffn_norm(x)) # channel
```

8.2 Hybrid Attention Pattern

K3 用两种 attention 层交替：

层	0	1	2	3	4	5	6	7
Attn	KDA	KDA	KDA	**MLA**	KDA	KDA	KDA	**MLA**
FFN	MoE	MoE	MoE	MoE	MoE	MoE	MoE	MoE

规则：每 4 层放 1 次 MLA（0-based 层 3, 7, 11, ...），**末层强制 MLA**。

models/k3_config.py —layer_types

```python
def layer_types(self) -> list[str]:
    """Hybrid: 3 KDA + 1 MLA per group, last always MLA."""
    types = ["kda"] * self.num_hidden_layers
    for i in range(self.num_hidden_layers):
        if i % 4 == 3:
            types[i] = "mla"
    types[-1] = "mla" # last layer forced
    return types

def layer_specs(self):
    return [(kind, "moe") for kind in self.layer_types()]
```

为什么 KDA 不需要 RoPE？

KDA 的 gate/decay 机制天然提供位置感知：远的 token 衰减更多，近的保留更多。但 softmax attention（MLA）没有这个机制，所以真实 K3 用 NoPE（本复现的 MLA 也是 NoPE）。位置感知从 KDA 层“渗透”到 MLA 层——3:1 的比例足够了。

8.3 CausalLM 完整数据流

models/causal_lm.py —CausalLM

```
class CausalLM(nn.Module):
    def __init__(self, config):
        self.embedding = nn.Embedding(vocab_size, D) # [V, D]
        self.blocks = ModuleList([
            DecoderBlock.from_spec(config, attn, ffn)
            for attn, ffn in config.layer_specs()
        ])
        self.norm = RMSNorm(D)
        self.lm_head = nn.Linear(D, vocab_size)  # [V, D]
        if config.tie_word_embeddings:
            self.lm_head.weight = self.embedding.weight

    def forward(self, input_ids, labels=None):
        x = self.embedding(input_ids) # [B,T] -> [B,T,D]
        if self.mixer is None:        # attnres="off"
            for block in self.blocks:
                x = block(x)          # [B,T,D] -> [B,T,D]
        else:
            x = self.mixer(x)         # AttnRes 深度残差, 见 §9
        logits = self.lm_head(self.norm(x)) # [B,T,D] -> [B,T,V]
        if labels is None:
            return logits
        # Shifted CE: predict next token
        return cross_entropy(logits[:,:-1], labels[:,1:])
```

残差流是可替换的

上面的 DecoderBlock 逐层堆叠（`x = x + sublayer(norm(x))`）是 `config.attnres="off"` 时的默认路径。置为 `"full"` / `"block"` 时，CausalLM 会把每个 block 拆成 attn / ffn 两个原子子层交给 `mixer`，用**深度维注意力**代替等权残差加法——见 §9。真实 K3 用的是 `block` 模式。

8.4 两种配置

	KDAConfig（纯 KDA）	**K3Config**（混合）
Attn	KDA only	3 KDA + 1 MLA
FFN	SwiGLU	LatentMoE
典型规模	~8M (toy)	~8M (toy) / ~500M (0.5b)
`layer_specs()`	`[("kda","swiglu")] * L`	`[(kind,"moe") for kind in ...]`

8.5 K3 toy 尺寸

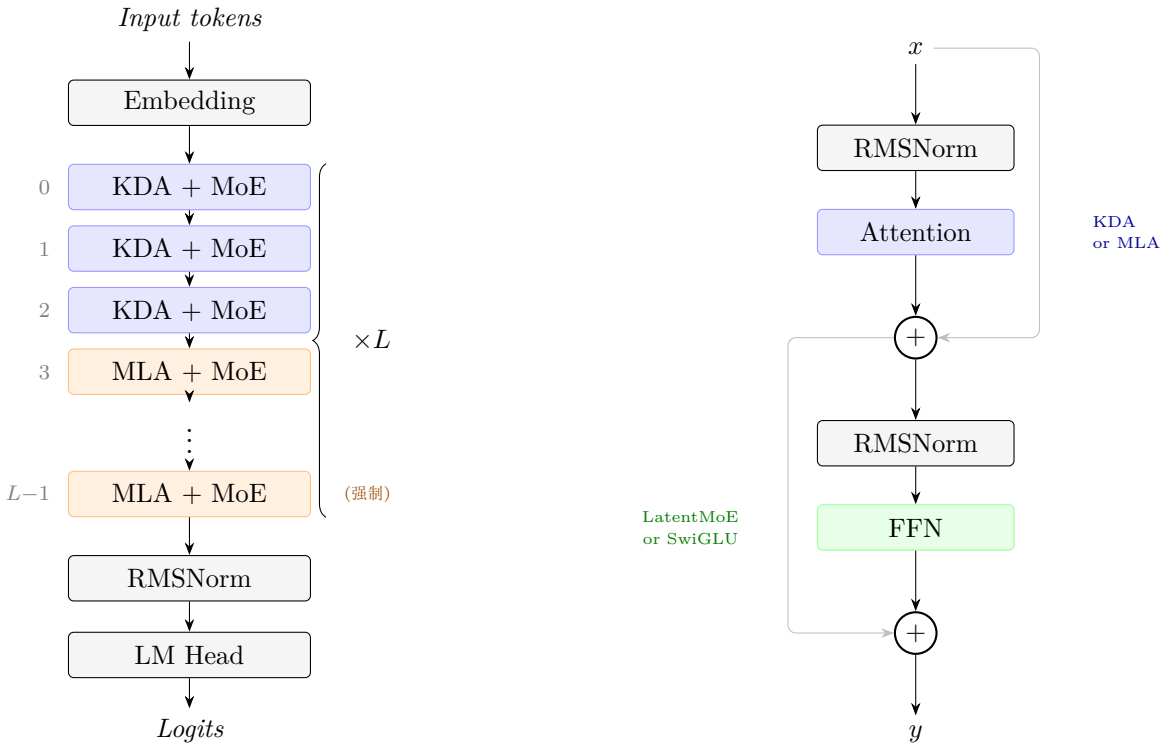
参数	真实 K3	toy 复现	缩比
D	7168	256	28×
L	93	4	23×
$H = H_V$	96	8	12×
$K = V$	128	16	8×
kv_lora_rank	512	32	16×
q_lora_rank	1536	64	24×
ℓ (MoE latent)	3584	128	28×
n_{routed} / Top-k	896/16	16/2	56× / 8×

8.6 DecoderBlock 构建

layers/block.py —build_attn / build_ffn

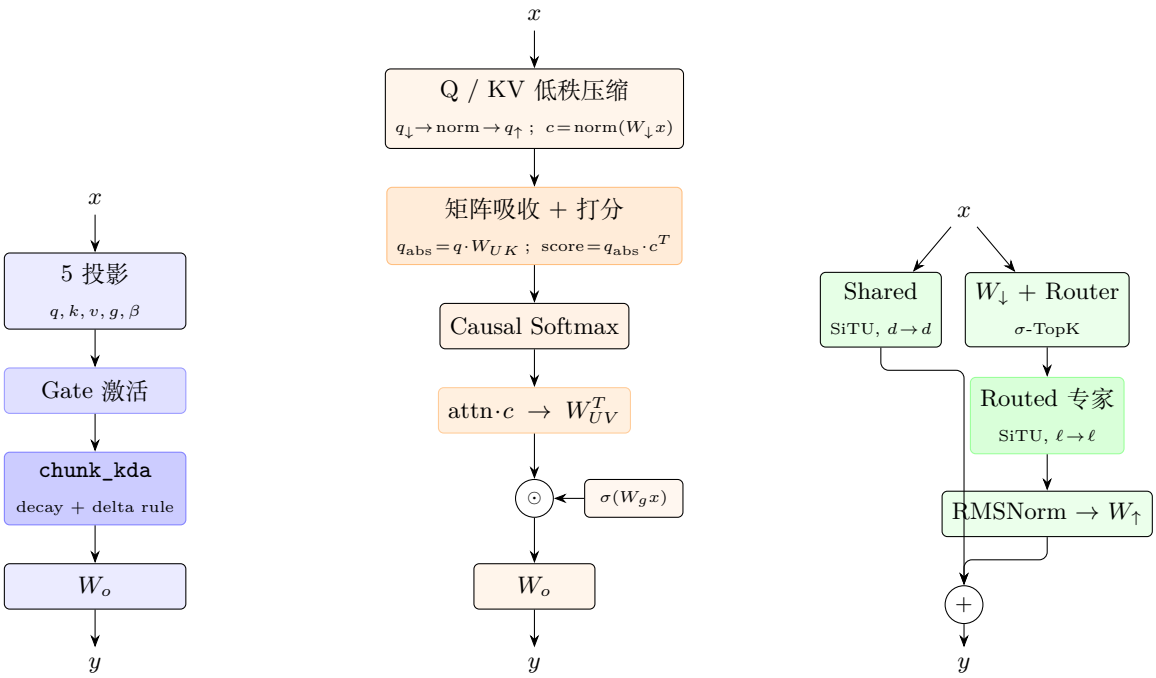
```python
def build_attn(config, kind: str) -> nn.Module:
    if kind == "kda": return KDAAttention.from_config(config)
    if kind == "mla": return GatedMLA.from_config(config)

def build_ffn(config, kind: str) -> nn.Module:
    if kind == "swiglu": return SwiGLUMLP.from_config(config)
    if kind == "moe": return LatentMoE.from_config(config)

class DecoderBlock(nn.Module):
    def forward(self, x):
        x = x + self.attn(self.attn_norm(x))
        return x + self.ffn(self.ffn_norm(x))
```

8.7 架构图



(a) 整体模型　　(b) DecoderBlock

图 1: K3 混合架构。(a) 整体模型：每 4 层 1 次 MLA（层 3, 7, 11, …），末层强制 MLA，所有 FFN 均为 LatentMoE。(b) DecoderBlock：Pre-Norm 残差，两个子块各含 RMSNorm → 子层 → 残差加。



(a) KDA Attention (b) Gated MLA (c) LatentMoE

图 2: K3 三大组件。(a) KDA：5 路投影 → gate 激活 → `chunk_kda`（decay + delta rule）→ 输出投影。(b) Gated MLA：q 吸收 W_{UK} 后在 latent c 上打分（NoPE）；输出经 sigmoid 门控。(c) LatentMoE：shared 全宽 d + routed 半宽 $\ell = d/2$；sigmoid-TopK 路由，padded bmm 稀疏执行。

8.8 本章小结

K3 架构 = Hybrid Attention（3 KDA + 1 MLA，末层强制 MLA）+ LatentMoE。KDA 层提供线性复杂度的序列混合和位置感知（通过 decay），MLA 层提供全局 softmax attention（NoPE，利用 KDA 渗透的位置信息）。每层默认是 Pre-Norm 残差 DecoderBlock；`config.attnres` 可以把这条等权残差流换成 AttnRes 深度注意力（§9）。

9 Attention Residual 深度残差

9.1 从”等权累加”到”按内容选择”

标准 Pre-Norm 残差把每层输出**无条件加**进残差流：

$$x_l = x_{l-1} + f_l(x_{l-1}), \qquad x_N = x_0 + \sum_{l=1}^{N} f_l(x_{l-1})$$

展开后每一项权重恒为 1：第 3 层的输出和第 80 层的输出对最终表示的”名义”贡献一样大，深层无法表达”我这一步应该主要读第 12 层的结果”。

AttnRes（`arXiv:2603.15031`）把这个加法换成**深度维上的 softmax 注意力**：第 l 层持有一个可学习 query 向量 $w_l \in \mathbb{R}^D$，把此前所有层的输出当成”可读的记忆”：

$$s_{l,i} = w_l^\top \mathrm{RMS}(v_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, l-1 \tag{A1}$$

$$\alpha_{l,i} = \frac{\exp(s_{l,i})}{\sum_j \exp(s_{l,j})} \qquad [n, B, T] \tag{A2}$$

$$h_l = \sum_i \alpha_{l,i}\, v_i \qquad [B, T, D] \tag{A3}$$

$$v_l = f_l(h_l) \tag{A4}$$

其中 $v_0 = x$（embedding 输出），f_l 是已经含 Pre-Norm 的原子子层，$\mathrm{RMS}(\cdot)$ 是不带 gain 的 RMS 归一化。最后（`is_final_aggregate=True`）再用一个独立 query 聚合所有源得到 y。

注意力权重是逐 token 的

$s_{l,i}$ 的形状是 $[n, B, T]$——每个 batch、每个位置 t 都有自己的一套深度权重。所以同一个位置在不同深度可以读不同的层，但**不跨时间混合**，因果性完全不受影响（`test_attnres_is_still_causal`）。

9.2 DepthResidual：三个实现细节

layers/attn_res.py —DepthResidual

```python
class DepthResidual(nn.Module):
    def __init__(self, dim, eps=1e-8, zero_init=True):
        self.query = nn.Parameter(torch.zeros(dim)) # [D]
        self.norm = RMSNorm(dim, eps=eps)       # gain gamma

    def effective_query(self):
        return (self.query * self.norm.weight).float() # 折叠 gain

    def forward(self, sources):
        sources = stack_layers(sources)           # [n,B,T,D]
        q = self.effective_query()                # [D]
        k = rms(sources.float(), self.norm.eps)   # 只用于打分
        logits = einsum('d, n b t d -> n b t', q, k)
        w = logits.softmax(dim=0)                 # 在深度维 softmax
        out = einsum('n b t, n b t d -> b t d', w, sources.float())
        return out.to(sources.dtype)
```

(1) gain 折叠 RMSNorm 的可学习 gain γ 本该作用在 key 上，但 $w^\top(\gamma \odot \mathrm{RMS}(v)) = (w \odot \gamma)^\top \mathrm{RMS}(v)$，所以直接把 γ 折进 query：$\tilde{w}_l = w_l \odot \gamma_l$。少一次 $[n, B, T, D]$ 的逐元素乘法，两阶段算法里也只需要传一个向量。

(2) 打分用归一化的 v，加权和用原始 v 注意 `logits` 用 `k = rms(sources)`，而 `out` 用的是 `sources` 本身。

为什么这样不对称？

打分要的是**方向**：RMS 之后 $s_{l,i}$ 与 $\|v_i\|$ 无关，一层输出幅度大不会自动抢到高权重，softmax 只按”内容像不像我要读的东西”分配。

加权和要的是**原始信息**：如果对归一化后的 v 求和，每层输出的模长（承载着”这层贡献多大”的信息）就被抹掉了，深层的小幅修正会被放大到和主干同量级。

(3) zero-init query `query` 默认初始化为 0 ⇒ 所有 logits 为 0 ⇒ softmax 均匀 ⇒

$$h_l = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{l-1} v_i$$

训练起步就是**等权深度平均**（已实测：零初始化时 `forward` 输出与 `sources.mean(0)` 逐位相同），行为接近标准残差但自带 $1/l$ 缩放，之后由梯度慢慢学出偏好。设 `zero_init_queries=False` 则用 $\mathcal{N}(0, 0.02^2)$。

9.3 Full 与 Block：源数量的差别

两种堆叠方式的区别只在**谁有资格进入源列表**：

- `FullAttnResStack`
  保留**每一个原子层**的输出作为源，第 l 层在 $l+1$ 个源上做注意力。
- `BlockAttnResStack`
  把 N 个原子层切成大小为 S 的块，**块内退化成普通求和**（running partial $p \leftarrow p + v$），只有**块的输出** b_j 才进入源列表。

	Full	**Block (S)**	标准残差
注意力源数	最多 $N+1$	最多 $N/S+2$	1
需保留的 $[B,T,D]$ 激活	$O(N)$	$O(N/S)$	$O(1)$
深度注意力 FLOPs	$O(N^2BTD)$	$O(N^2BTD/S)$	0
新增参数	$2(N+1)D$	$2(N+1)D$	0

参数量不变（每个原子层都有自己的 query），变的是**显存与带宽**。真实 K3（$L=93$，$N=186$）取 $S=24$ 个原子层（12 个 DecoderBlock），源数从 187 降到 ≤ 10。

layers/attn_res.py —BlockAttnResStack.forward_naive（语义参考实现）

```
blocks = [x]       # b_0 = embedding
partial = None
for layer_idx, (layer, residual) in enumerate(zip(self.layers, self.residuals), 1):
    sources = blocks if partial is None else blocks + [partial]
    h = residual(sources)          # 深度注意力
    out = layer(h)
    partial = out if partial is None else (partial + out) # 块内：普通累加
    if (layer_idx % self.block_size == 0) or (layer_idx == len(self.layers)):
        blocks.append(partial)     # 块边界：定型成一个新源
        partial = None
return self.final_residual(blocks)
```

9.4 两阶段算法（inter / intra）

块内逐层跑上面的 naive 版本有个浪费：块内每一层的 query 面对的 **块间源** $b_0 \dots b_{j-1}$ **是完全相同且固定的**，唯一在变的只有 running partial p。于是拆成两个阶段：

1. **inter（批量）**：把块内 S 个 query 堆成 $[S, D]$，对固定源做一**次**批量 einsum，拿到每个 query 的 online-softmax 三元组 $(m,\ \text{numer},\ \text{denom})$；
2. **intra（串行）**：逐层把新出现的 p 作为**单个源**合并进去，用 online softmax 的 merge 规则更新三元组，再 `normalized()` 出 h。

online softmax 的三元组定义与合并规则（和 FlashAttention 同构，只是”序列维”换成了”深度维”）：

$$m = \max_i s_i, \quad n = \sum_i e^{s_i - m} v_i, \quad d = \sum_i e^{s_i - m}, \quad h = n/d \tag{OS1}$$

合并两组统计量 (m_a, n_a, d_a) 与 (m_b, n_b, d_b)，令 $m = \max(m_a, m_b)$、$w_a = e^{m_a - m}$、$w_b = e^{m_b - m}$：

$$n = w_a\, n_a + w_b\, n_b, \quad d = w_a\, d_a + w_b\, d_b \tag{OS2}$$

单个源 p 的三元组是 $(m = s_p,\ \text{numer} = p,\ \text{denom} = 1)$ ——因为 $e^{s_p - m} = 1$，不需要真的算指数（`single_source_stats`）。

layers/attn_res.py —_run_block_two_phase

```
queries = torch.stack([self.residuals[i].effective_query()
                       for i in range(start, end)], dim=0) # [S, D]
inter = attn_with_stats(queries, stack_layers(blocks), self.eps) # phase 1: 一次算完

partial = None
for local_idx, layer_idx in enumerate(range(start, end)): # phase 2: 串行
    stats = inter.select(local_idx)
    if partial is not None:
        intra = single_source_stats(queries[local_idx], partial, self.eps)
        stats = merge_attn_stats(stats, intra)        # online softmax merge
    h = stats.normalized()
    out = self.layers[layer_idx](h)
    partial = out if partial is None else (partial + out)
return partial
```

等价性是被测出来的，不是假设的

`test_block_two_phase_matches_naive` 直接对拍 `mixer.forward_naive(emb)` 与 `mixer(emb)`，`atol=rtol=1e-5` 通过。Full 版同理：不传 `schedule_block_size` 走 naive，传了走两阶段，两者一致。

9.5 接入 CausalLM

原子层 = 半个 DecoderBlock

深度注意力的粒度是**原子层**而不是 DecoderBlock：每个 block 拆成”norm + attn” 和”norm + ffn” 两个 Pre-Norm 原子层，所以原子层数 $N = 2L$。

models/causal_lm.py —_build_mixer

```
atomics = []
for block in blocks:
    atomics.append(BorrowedSubLayer(block.attn_norm, block.attn))
    atomics.append(BorrowedSubLayer(block.ffn_norm, block.ffn))

if mode == "full":
    return FullAttnResStack(D, atomics, eps=..., zero_init_queries=..., ...)
if mode == "block":
    return BlockAttnResStack(D, atomics,
        block_size=atomic_block_size(config.num_hidden_layers,
                                     config.attnres_block_size), ...)
```

BorrowedSubLayer：借用而不注册

layers/attn_res.py —BorrowedSubLayer

```
class BorrowedSubLayer(nn.Module):
    def __init__(self, norm, fn):
        self._borrowed = (norm, fn) # 普通 tuple，不是 self.norm = norm

    def forward(self, x):
        norm, fn = self._borrowed
        return fn(norm(x))
```

为什么必须用 tuple 藏起来？

如果写成 `self.norm = norm`，`nn.Module` 会把它**注册成子模块**，于是同一份权重同时挂在 `blocks.0.attn.*` 和 `mixer.layers.0.fn.*` 下：

- `model.parameters()` 出现重复 ⇒ 优化器对同一参数更新两次
- `state_dict()` 多出一份镜像键 ⇒ 旧 checkpoint 加载不上

放进普通 tuple 后 `blocks.*` 仍是唯一属主，`mixer` 下只多出 depth query 与 gain（`test_no_duplicate_parameter_ids` 守这条）。

forward：mixer 接管整条残差流

models/causal_lm.py —CausalLM.forward

```
x = self.embedding(input_ids)
if self.mixer is None:
    for block in self.blocks:  # attnres="off": 老路径
        x = block(x)
else:
    x = self.mixer(x)          # full / block: DecoderBlock.forward 被完全绕过
logits = self.lm_head(self.norm(x))
```

注意 `mixer` 打开后 `DecoderBlock.forward`（§8 里的 `x = x + attn(...)`）**一次都不会被调用**——残差加法整个交给深度注意力，DecoderBlock 退化成”两个子层的容器”。

新增参数量：可忽略

每个 DepthResidual 只有 query $[D]$ 和 gain $[D]$，共 $N+1$ 个：

配置	D / L	原子层 N	新增参数
toy (K3Config)	256 / 4	8	4,608
0.5b preset	768 / 24	48	75,264

9.6 配置与命令行

字段	默认	含义
`attnres`	`"off"`	`off` / `full` / `block`
`attnres_block_size`	`None`	每块几个 **DecoderBlock**；`None` → $\lceil L/8 \rceil$
`attnres_zero_init_queries`	`True`	query 零初始化（等权起步）
`attnres_final_aggregate`	`True`	末尾再做一次全源聚合

layers/attn_res.py —atomic_block_size

```python
def atomic_block_size(num_hidden_layers, attnres_block_size):
    """DecoderBlock 数 -> 原子层数。None 时目标约 8 块。"""
    layers_per_block = (attnres_block_size if attnres_block_size is not None
                        else max(1, (num_hidden_layers + 7) // 8))
    return layers_per_block * 2 # 每个 DecoderBlock = attn|ffn 两个原子层
```

单位换算是最容易踩的一处：配置字段的单位是 **DecoderBlock 数**，而堆叠类收到的 `block_size` 是**原子层数**（×2）。例如 $L = 24$、块大小留 `None`：

$$\lceil 24/8 \rceil = 3 \text{ 个 DecoderBlock} \;\rightarrow\; S = 6 \text{ 个原子层} \;\rightarrow\; N/S = 48/6 = 8 \text{ 块}$$

```
uv run python train_k3.py --preset toy --attnres block --attnres-block-size 2
uv run python train_k3.py --preset 0.5b --attnres block # 块大小自动 ~L/8
```

`KDAConfig` 与 `K3Config` 都在 `__post_init__` 里调 `validate_attnres`，非法模式 / 块大小在构造时就报错。旧 checkpoint 的 config 里没有这几个字段，加载时回落到 `off`（见 §9.7 验证清单最后两行）。

9.7 验证清单

`tests/integration/test_attn_res.py`，14 项全过：

测试	守住的性质
`default_attnres_is_off`	默认不改变任何既有行为，`mixer is None`
`invalid_attnres_rejected`	非法 mode / `block_size=0` 构造期报错
`mixer_kind_and_atomic_count`	原子层数 $= 2L$，块大小 ×2 换算
`auto_block_size_targets_eight_blocks`	$L = 93 \rightarrow 24$（K3 $S = 12$ 个 block）
`no_duplicate_parameter_ids`	借用不注册，参数 id / 名字均无重复
`off_and_block_differ_at_same_seed`	同种子下确实换了计算图
`block_two_phase_matches_naive`	两阶段 ≡ naive，`atol 1e-5`
`attnres_is_still_causal`	改末位 token 不影响前缀 logits
`kda_config_block_runs`	纯 KDA 配置也能开
`attnres_ckpt_roundtrip`	存取后逐位一致，config 字段保真
`old_ckpt_without_attnres_stays_off`	向后兼容
`attnres_block_overfits_single_batch`	200 步 loss < 0.5，能训

混合精度

`DepthResidual.forward`（naive 路径）显式 `.float()` 后再算 softmax 与加权和，最后 cast 回原 dtype；两阶段路径的 query 是 fp32、源保持原 dtype，靠 einsum 的类型提升处理。bf16 autocast 下前向实测正常。和 §1 的结论一致：**指数/累和一律不要放进 fp16**。

9.8 本章小结

AttnRes 把残差流从”等权累加”升级成”深度维 softmax 注意力”：每层用自己的 query 决定读此前哪些层的输出，打分在 RMS 归一化后做（方向）、加权和在原始张量上做（保留模长），query 零初始化让训练从等权平均起步。Full 版源数随深度线性增长，Block 版把块内退化成普通求和、只让块输出进入源列表，把源数压到 $O(N/S)$；两阶段算法进一步把块间注意力批量化，块内用 online softmax 增量合并，与 naive 实现数值等价。接入 `CausalLM` 时每个 DecoderBlock 拆成 attn / ffn 两个原子层，`BorrowedSubLayer` 用普通 tuple 借用权重以免重复注册，`attnres="off"` 保持旧路径不变。

10 反向传播推导

10.1 Forward 回顾

逐步写下 forward（省略 batch/head 下标）：

$$S_{\text{dec}} = \exp(g_t) \odot S_{t-1} \tag{F1}$$

$$p_t = k_t^T S_{\text{dec}} \tag{F2}$$

$$r_t = v_t - p_t \tag{F3}$$

$$a_t = \beta_t \cdot k_t \tag{F4}$$

$$S_t = S_{\text{dec}} + a_t \otimes r_t \tag{F5}$$

$$o_t = q_t^T S_t \tag{F6}$$

10.2 反传公式（BPTT，$T \to 0$）

设 dS_{acc} 是从时间步 t 开始累积到 S_t 上的梯度。逆序遍历：

Step 1: $o_t = q_t^T S_t$

$$dS_{\text{acc}} \mathrel{+}= q_t \otimes do_t \xrightarrow{\texttt{einsum('bhk,bhv->bhkv')}} [B, HV, K, V] \tag{1}$$

$$dq_t = do_t^T S_t \xrightarrow{\texttt{einsum('bhv,bhkv->bhk')}} [B, HV, K] \tag{2}$$

Step 2: $S_t = S_{\text{dec}} + a_t \otimes r_t$　外积的反传：$d(a \otimes r) = (\cdot)$，分解为：

$$da_t = \sum_v r_{t,v} \cdot dS_{\text{acc},\cdot,v} \xrightarrow{\texttt{einsum('bhv,bhkv->bhk')}} [B, HV, K] \tag{3}$$

$$dr_t = \sum_k a_{t,k} \cdot dS_{\text{acc},k,\cdot} \xrightarrow{\texttt{einsum('bhk,bhkv->bhv')}} [B, HV, V] \tag{4}$$

Step 3: $a_t = \beta_t \cdot k_t$

$$d\beta_t = \sum_k k_{t,k} \cdot da_{t,k} \xrightarrow{\texttt{einsum('bhk,bhk->bh')}} [B, HV] \tag{5}$$

$$dk_t^{(a)} = \beta_t \cdot da_t \qquad [B, HV, K] \tag{6}$$

Step 4: $r_t = v_t - p_t = v_t - k_t^T S_{\text{dec}}$

$$dv_t = dr_t \qquad [B, HV, V] \tag{7}$$

$$dk_t^{(r)} = -S_{\text{dec}}^T \cdot dr_t \xrightarrow{\texttt{einsum('bhv,bhkv->bhk')}} [B, HV, K] \tag{8}$$

$$dS_{\text{dec}}^{(r)} = -k_t \otimes dr_t \xrightarrow{\texttt{einsum('bhv,bhk->bhkv')}} [B, HV, K, V] \tag{9}$$

Step 5: 合并 dS_{dec} 并传递 dg_t, dS_{t-1}

$$dS_{\text{dec}}^{\text{total}} = dS_{\text{acc}} + dS_{\text{dec}}^{(r)} = dS_{\text{acc}} - k_t \otimes dr_t$$

因为 $S_{\text{dec}} = \exp(g_t) \odot S_{t-1}$:

$$dg_t = S_{\text{dec}} \odot dS_{\text{dec}}^{\text{total}} \xrightarrow{\texttt{einsum('bhkv,bhkv->bhk')}} [B, HV, K] \tag{10}$$

$$dS_{t-1} = \exp(g_t) \odot dS_{\text{dec}}^{\text{total}} \qquad [B, HV, K, V] \tag{11}$$

Step 6: 合并 dk_t 和 GVA 归约

$$dk_t = dk_t^{(a)} + dk_t^{(r)} = \beta_t \cdot da_t - S_{\text{dec}}^T \cdot dr_t$$

GVA 反传（$H_V \to H$）:

$$dq_H = dq_{H_V}.\texttt{view}(B, T, H, G, K).\texttt{sum}(\text{dim} = 3) \cdot \text{scale}$$

$$dk_H = dk_{H_V}.\texttt{view}(B, T, H, G, K).\texttt{sum}(\text{dim} = 3)$$

10.3 代码对照

ops/reference/recurrent.py —KDAFunction.backward

```
for t in range(T - 1, -1, -1):
    q_t, k_t, b_t = q_ts[:,t], k_ts[:,t], b_ts[:,t]
    S_dec, r_t, a_t = S_decs[:,t], r_ts[:,t], a_ts[:,t]
    exp_g_t, do_t = exp_g_ts[:,t], do[:,t]

    # Step 1: o_t = q_t . S_t
    S_t = S_dec + einsum('bhk,bhv->bhkv', a_t, r_t)
    dS_acc += einsum('bhk,bhv->bhkv', q_t, do_t)
    dq_e[:,t] = einsum('bhv,bhkv->bhk', do_t, S_t)

    # Step 2: outer product grads
    da_t = einsum('bhv,bhkv->bhk', r_t, dS_acc)
    dr_t = einsum('bhk,bhkv->bhv', a_t, dS_acc)

    # Step 3: a_t = beta_t * k_t
    dbeta[:,t] = einsum('bhk,bhk->bh', k_t, da_t)
    dk_t_a = b_t.unsqueeze(-1) * da_t

    # Step 4: r_t = v_t - k_t . S_dec
    dv[:,t] = dr_t
    dS_dec_from_r = -einsum('bhv,bhk->bhkv', dr_t, k_t)
    dk_t_r = -einsum('bhv,bhkv->bhk', dr_t, S_dec)

    # Step 5: S_dec = exp(g) * S_{t-1}
    dS_dec_total = dS_acc + dS_dec_from_r
    dk_e[:,t] = dk_t_a + dk_t_r
    dg[:,t] = einsum('bhkv,bhkv->bhk', S_dec, dS_dec_total)
    dS_acc = exp_g_t.unsqueeze(-1) * dS_dec_total

# Step 6: GVA reduce
dq_H = dq_e.view(B,T,H,G,K).sum(dim=3) * scale
dk_H = dk_e.view(B,T,H,G,K).sum(dim=3)
```

$dS_{\text{dec}}^{\text{total}}$ 为什么包含两项？

$S_t = S_{\text{dec}} + a_t \otimes r_t$，$S_{\text{dec}}$ 同时参与了：

1. 直接传递到 dS_{acc}（作为 S_t 的一部分被读出）
2. 通过 $r_t = v_t - k_t \cdot S_{\text{dec}}$ 参与 delta rule

所以 $dS_{\text{dec}}^{\text{total}} = dS_{\text{acc}} + dS_{\text{dec}}^{(r)}$，两条路径的梯度要**加**起来（chain rule 分叉处求和）。

10.4 本章小结

KDA backward 是 BPTT 展开: 逆序遍历时间步, 每步 6 个 einsum + 一次 dS 累积更新。GVA 反传在最后做 `view+sum`。手写 backward 的关键是正确处理 dS_{dec} 的两条梯度路径（直接传递 + 通过 r_t 的 delta rule 路径）。

11 符号表

11.1 形状参数

符号	含义	典型值 (toy)
B	batch size	2–4
T	序列长度	128–2048
D	hidden_size	64 / 256
H	query/key 头数	4 / 8
H_V	value 头数（GVA）	$G \cdot H$
G	GVA 组数	H_V/H
K	key/query 头维度	16
V	value 头维度（$= K$）	16
C	chunk_size	16 / 64
r	KV latent rank (MLA)	32
d_q	MLA query head dim	16
d_v	MLA value head dim	16
ℓ	MoE latent width ($= D/2$)	128
n_r	routed 专家数	16
k	Top-k	2
n_s	shared 专家数	2
d_{ff}	专家中间维度	96
C_{moe}	MoE 专家容量（pad 宽度）	动态
α_{aux}	Switch/GShard aux 系数	10^{-2}
α_z	router z-loss 系数	10^{-3}
N	AttnRes 原子层数 ($= 2L$)	8
S	AttnRes 块大小（原子层）	2–24

11.2 KDA 变量

符号	形状	含义
q_t	$[B, HV, K]$	query（已 GVA 展开 + scale）
k_t	$[B, HV, K]$	key（已 GVA 展开）
v_t	$[B, HV, V]$	value
g_t	$[B, HV, K]$	gate（log-space 衰减，逐维逐头）
β_t	$[B, HV]$	写入强度
S_t	$[B, HV, K, V]$	KV 状态矩阵
S_{dec}	$[B, HV, K, V]$	衰减后的状态
p_t	$[B, HV, V]$	旧状态对 k_t 的预测
r_t	$[B, HV, V]$	delta rule 残差 $= v_t - p_t$
a_t	$[B, HV, K]$	写入向量 $= \beta_t \cdot k_t$
o_t	$[B, HV, V]$	读出 $= q_t \cdot S_t$

11.3 Gate 变量

符号	形状	含义
g_{raw}	$[B, T, HV, K]$	gate 投影原始输出
$A_{\log}$	$[HV]$	head-wise 衰减参数 (log-space)
Δ_b	$[HV, K]$	per-dim gate bias
rate	$[HV, 1]$	$\exp(A_{\log})$
input	$[B, T, HV, K]$	$g_{\text{raw}} + \Delta_b$
L	标量	lower_bound (-5.0)

11.4 MLA 变量

符号	形状	含义
c	$[B, T, r]$	KV latent（推理时缓存这个）
q	$[B, T, H, d_q]$	query（低秩路径输出）
W_{UK}	$[H, d_q, r]$	key 解压矩阵（吸收进 q）
W_{UV}	$[H, d_v, r]$	value 解压矩阵
q_{abs}	$[B, T, H, r]$	吸收后的 query
score	$[B, H, T, T]$	$q_{\text{abs}} \cdot c^T$
attn	$[B, H, T, T]$	causal softmax
$\tilde{o}_{\text{lat}}$	$[B, H, T, r]$	latent 加权输出
$\tilde{o}$	$[B, H, T, d_v]$	解压后的输出
gate	$[B, T, H \cdot d_v]$	$\sigma(W_g x)$

11.5 LatentMoE 变量

符号	形状	含义
x	$[B, T, D]$	输入
z	$[B, T, \ell]$	latent ($\ell = D/2$)
logits	$[B, T, n_r]$	router logits $W_r x$
s	$[B, T, n_r]$	sigmoid 分数 $\sigma(\text{logits})$
b	$[n_r]$	expert bias（非持久，只进 TopK）
ids	$[B, T, k]$	Top-k 专家索引
p_i	$[B, T, k]$	sigmoid-L1 权重 $s_i / \sum_{j \in T} s_j$
padded	$[n_r, C_{\text{moe}}, \ell]$	dispatch 后 pad 到容量 C_{moe}
C_{moe}	标量	最大专家负载（pad 宽度）
u	$[B, T, \ell]$	routed 加权输出
s_{sh}	$[B, T, D]$	shared 专家求和
y	$[B, T, D]$	$s_{\text{sh}} + W_{\uparrow}\text{RMSNorm}(u)$
f_e, P_e	标量	aux loss 负载占比 / 平均分数
$\mathcal{L}_{\text{aux}}, \mathcal{L}_z$	标量	负载均衡 / z-loss
$\alpha_{\text{aux}}, \alpha_z$	标量	对应系数（10^{-2} / 10^{-3}）

11.6 AttnRes 变量

符号	形状	含义
v_i	$[B, T, D]$	第 i 个源（v_0 = embedding 输出）
w_l	$[D]$	第 l 层的 depth query（零初始化）
γ_l	$[D]$	DepthResidual 的 RMSNorm gain
$\tilde{w}_l$	$[D]$	折叠后的 query $= w_l \odot \gamma_l$
$s_{l,i}$	$[n, B, T]$	深度打分 $= \tilde{w}_l^{\top}\text{RMS}(v_i)$
$\alpha_{l,i}$	$[n, B, T]$	深度维 softmax 权重
h_l	$[B, T, D]$	第 l 层的输入 $= \sum_i \alpha_{l,i} v_i$
b_j	$[B, T, D]$	第 j 个块的输出（Block 版的源）
p	$[B, T, D]$	块内 running partial
m, n, d	$[B, T]$ / $[B, T, D]$ / $[B, T]$	online softmax 三元组

11.7 Einsum 速查

操作	einsum	结果形状
key 查状态	`'bhk,bhkv->bhv'`	p_t $[B, HV, V]$
外积写入	`'bhk,bhv->bhkv'`	$a_t \otimes r_t$ $[B, HV, K, V]$
读出	`'bhk,bhkv->bhv'`	o_t $[B, HV, V]$
MLA 吸收 W_{UK}	`'bthd,hdj->bthj'`	q_{abs} $[B, T, H, r]$
MLA 打分	`'bthj,bsj->bhts'`	score $[B, H, T, T]$
MLA latent 加权	`'bhts,bsj->bhtj'`	$\tilde{o}_{\text{lat}}$ $[B, H, T, r]$
MLA 解压	`'bhtj,hvj->bhtv'`	$\tilde{o}$ $[B, H, T, d_v]$
AttnRes 深度打分	`'d,nbtd->nbt'`	$s_{l,i}$ $[n, B, T]$
AttnRes 深度加权和	`'nbt,nbtd->btd'`	h_l $[B, T, D]$
AttnRes 批量打分（inter）	`'qd,nbtd->qnbt'`	logits $[S, n, B, T]$
MoE dispatch pad	`index_put`	padded $[R, C_{\text{moe}}, \ell]$
MoE gate 投影（grouped）	`bmm(padded, w_g.T)`	wg $[R, C_{\text{moe}}, ff]$
MoE up 投影（grouped）	`bmm(padded, w_u.T)`	wu $[R, C_{\text{moe}}, ff]$
MoE 输出投影（grouped）	`bmm(g⊙h, w_o.T)`	out $[R, C_{\text{moe}}, \ell]$
MoE scatter-add	`index_add(0, tok, ...)`	u $[N, \ell]$

11.8 总结与延伸

核心要点回顾

1. **KDA** = delta rule 状态更新 + gate 衰减，线性复杂度
2. **分块** = chunk 内下三角解 + chunk 间状态递推，等价于 naive recurrent
3. **GVA** = $H_V = G \cdot H$，forward repeat_interleave / backward view+sum
4. **MLA** = 低秩 latent + 矩阵吸收，KV cache 从 $2Hd$ 降到 r
5. **LatentMoE** = shared 全宽 + routed 半宽 latent + SiTU-GLU 防溢出；K3 sigmoid-TopK 路由 + 稀疏 permute-dispatch（每 token 只算 k 个专家）+ Switch/GShard aux & z-loss 防塌缩
6. **K3 Hybrid** = 3 KDA + 1 MLA，KDA 提供位置感知
7. **AttnRes** = 深度维 softmax 残差，Block 版把源数压到 $O(N/S)$，两阶段 = inter 批量 + intra online-softmax 合并

未完成项

- L5 —项目内自研 fused gate Triton kernel
- L6 —recurrent decode cache（推理加速）
- AttnRes 与 recurrent decode 的组合（增量解码时的深度源缓存）
- AttnRes 开 / 关的收敛质量对比实验（目前只验证了等价性与可训练性）